

Probabilités 3 – Espérance, variance

Plan du chapitre

1	Espérance	1
1.1	Définition	1
1.2	Espérances des lois usuelles	2
1.3	Propriétés de l'espérance	4
1.4	Formule de transfert	6
1.5	Espérance d'un produit de v.a. indépendantes.	7
2	Variance et covariance	7
2.1	Variance : définition et exemples.	7
2.2	Variance et écart-type.	9
2.3	Covariance.	10
2.4	Propriétés de la covariance.	12
2.5	Variables aléatoires décorréllées.	13
3	Inégalités probabilistes	14
4	Compléments : preuve du Lemme 38.5	16
5	Méthodes pour les exercices.	18

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, (Ω, \mathbb{P}) désigne un espace probabilisé fini (i.e. Ω désigne un univers fini et \mathbb{P} est une probabilité définie sur Ω).

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . E et F sont des sous-ensembles de \mathbb{K} .

Comme $E \subset \mathbb{K}$, toute v.a. $X : \Omega \rightarrow E$ est en particulier une v.a. réelle ou complexe.

1 Espérance

1.1 Définition

Définition 38.1

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une v.a. On définit l'espérance de X comme étant :



Ne pas confondre $\mathbb{E}(X)$ avec $\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x)$ qui vaut toujours 1 !

L'espérance d'une v.a. X représente sa valeur moyenne. Pour le comprendre, prenons l'exemple d'un étudiant qui obtient 14 trois colles sur cinq et qui obtient 19 deux colles sur cinq. On note X la v.a. qui donne la note de cet étudiant en colle. On a donc

$$\mathbb{P}(X = 14) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 19) = \frac{2}{5}$$

Ici, on peut prendre $E = \{14, 19\}$. L'espérance de X sera donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 14 \times \mathbb{P}(X = 14) + 19 \times \mathbb{P}(X = 19) \\ &= 14 \times \frac{3}{5} + 19 \times \frac{2}{5} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Cela correspond bien à sa moyenne si ses notes correspondent exactement à ce que dicte la loi de X : en supposant qu'il passe cinq colles et a obtenu trois 14 et deux 19, sa moyenne est alors :

$$M = \frac{3 \times 14 + 2 \times 19}{3 + 2} = \frac{3}{5} \times 14 + \frac{2}{5} \times 19 = 16$$

Exemple 1. On lance un dé à six faces. On note X la v.a. qui correspond au chiffre obtenu. Que vaut l'espérance de X ?

Remarque.

- L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi. Si $X \sim Y$, alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.
- Bien que E soit infini, la somme ci-dessus peut être réécrite finie : on a plus précisément

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in E \setminus X(\Omega)} x \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{=0} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

et l'ensemble $X(\Omega)$ est fini car Ω l'est.

1.2 Espérances des lois usuelles

Théorème 38.2 – Espérances de lois usuelles

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Soit enfin X une v.a.

1. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.
2. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.
3. Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

Définition 38.4

On dit qu'une v.a. $X : \Omega \rightarrow E$ est p.s. constante (i.e. presque sûrement constante) s'il existe $\lambda \in E$ telle que $\mathbb{P}(X = \lambda) = 1$.
On peut alors écrire (abusivement) $X = \lambda$.

Notons, pour clarifier, X_λ la v.a. λ . Pour tout $x \in E$, on a :

$$\mathbb{P}(X_\lambda = x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \lambda \\ 0 & \text{si } x \neq \lambda \end{cases} \quad \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \lambda \\ 0 & \text{si } x \neq \lambda \end{cases}$$

de sorte que X_λ et X ont même loi. Ainsi, on peut écrire $X \sim X_\lambda$. Cependant, on a vu au chapitre 37 que deux v.a. peuvent avoir la même loi sans pour autant être égales. Ainsi, écrire $X = X_\lambda$ (ou encore $X = \lambda$) est un nouvel abus, car cela reviendrait à affirmer que les applications X et X_λ de Ω dans E sont égales en tout point. En pratique, comme on s'intéresse principalement aux lois des v.a. et non en les v.a. elles-mêmes (en tant qu'applications), cet abus n'est pas gênant.

Exemple 3. Si X est une v.a. p.s. constante égale à λ , alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
En effet, X et λ ont la même loi, donc la même espérance : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\lambda) = \lambda$.

1.3 Propriétés de l'espérance

Le Lemme qui suit n'a que peu d'intérêt en pratique. Il est néanmoins utile pour les démonstrations des propriétés qui suivent. La preuve de ce lemme se trouve dans la section Compléments en fin de chapitre.

Lemme 38.5

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une v.a. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Théorème 38.6 – Propriétés de l'espérance \mathbb{E}

Soit X et Y deux v.a. complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Linéarité :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$$

2. Positivité : si X est à valeurs dans \mathbb{R}_+ alors

$$\mathbb{E}(X) \geq 0$$

3. Croissance : si X et Y sont des v.a.r. telles que $X \leq Y$, alors

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

4. Inégalité triangulaire :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$$

Démonstration.

On ne montre que la première et la dernière assertion. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

De plus, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \right| \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad \text{car } \mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 0 \\ &= \mathbb{E}(|X|) \end{aligned}$$

□

Exemple 4. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Exemple 5. Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}_+ telle que $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$: une telle v.a. X est dite p.s. nulle et on écrira abusivement $X = 0$.

Remarque. $\mathbb{E}(X)$ est une constante (qui ne dépend que de la loi de X). Ainsi, par l'Exemple 2

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$$

Définition 38.7

Une v.a. X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ est dite une v.a. centrée.

Exemple 6. Si X est une v.a. quelconque, alors la v.a. $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

1.4 Formule de transfert

Théorème 38.8 – Formule de transfert

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une v.a. et $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ une application. Alors

Remarque. Cette formule est **incontournable**. Elle permet de calculer l'espérance de $f(X)$ uniquement à partir de la loi de X (et non celle de $f(X)$).

Exemple 7. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p > 0$. Déterminer la loi de $Y = \frac{1}{1+X}$.

1.5 Espérance d'un produit de v.a. indépendantes

Théorème 38.9

Soit X et Y deux v.a. (réelles ou) complexes **indépendantes**. Alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n v.a. (mutuellement) **indépendantes**, alors

$$\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_n)$$

Exemple 8. On considère X_1, \dots, X_n des v.a. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors

$$\mathbb{E}(X_1 \times \dots \times X_n) = \dots\dots\dots$$

2 Variance et covariance

Dans cette section, on se restreindra à des v.a. *réelles*.

2.1 Variance : définition et exemples

Définition 38.10 – Variance

Soit X une v.a.r. définie sur Ω . On appelle variance de X le réel positif :

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right) \geq 0$$

Autrement dit, on considère la v.a. centrée $X - \mathbb{E}(X)$, et on calcule la valeur moyenne de son carré. Plus $\mathbb{V}(X)$ est grand, plus X prend des valeurs dispersées autour de sa moyenne.

Théorème 38.11

Soit X une v.a.r. définie sur Ω . On a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Remarque. Le plus souvent, c'est à partir de cette formule qu'on calcule la variance d'une v.a.r.

Démonstration.

□

On rappelle que si X est une v.a. p.s. constante égale à un scalaire λ , on peut noter abusivement λ cette v.a.

Exemple 9. On a $\mathbb{V}(\lambda) = 0$.

Théorème 38.12

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

Démonstration.

□

Pour calculer l'espérance de X^2 , on utilise souvent le théorème de transfert :

Exemple 10. Soit X une v.a. telle que $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

□

2.2 Variance et écart-type

Théorème 38.13 – Variance après transformation affine

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et X une v.a.r. définie sur Ω . Alors

Démonstration.

On repart de la définition de la variance : on a

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+b) &= \mathbb{E}\left((X+b-\mathbb{E}(X+b))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((X+b-\mathbb{E}(X)-b)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= \mathbb{V}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX) &= \mathbb{E}\left((aX-\mathbb{E}(aX))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((aX-a\mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(a^2(X-\mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= a^2\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= a^2\mathbb{V}(X)\end{aligned}$$

□



En général, $\mathbb{V}(X+Y) \neq \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$! Pour traiter la variance d'une somme, on a besoin d'une autre notion : la covariance (cf partie suivante).

Définition 38.14 – Écart-type

Soit X une v.a.r. définie sur Ω . On appelle écart-type de X le réel positif :

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Définition 38.15

On dit qu'une v.a.r. X est centrée réduite si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$ (ou encore $\sigma(X) = 1$).

Théorème 38.16

Si X est une v.a.r. telle que $\sigma(X) > 0$, alors

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une v.a.r. centrée réduite.

Démonstration.

□

2.3 Covariance

Définition 38.17

Soit X et Y deux v.a.r. définies sur Ω . On appelle covariance de X et Y le réel

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

En d'autres termes, on considère les deux v.a.r. centrées, qu'on note ici pour simplifier

$$X' = X - \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$$

et on calcule l'espérance du produit $X'Y'$. Comme X' et Y' sont centrées, leur valeur moyenne est nulle, i.e. $\mathbb{E}(X') = \mathbb{E}(Y') = 0$.

- Lorsque $\text{Cov}(X, Y) > 0$, on dit que X et Y sont positivement corrélées. Cela signifie que, *en moyenne*, les v.a. X' et Y' tendent à prendre des valeurs de même signe lorsque ω parcourt Ω . Ce phénomène est d'autant plus marqué que $\text{Cov}(X, Y)$ est grand.
- À l'inverse, si $\text{Cov}(X, Y) < 0$, on dit que X et Y sont négativement corrélées. Cela signifie que, *en moyenne*, les v.a. X' et Y' tendent à prendre des valeurs de signes opposés lorsque ω parcourt Ω , des valeurs de signes opposés. Ce phénomène est d'autant plus marqué que $\text{Cov}(X, Y)$ est grand en valeur absolue.

Par exemple, en fonction du jour de l'année, l'énergie utilisée pour la climatisation et la consommation de glaces sont des v.a. positivement corrélées : par rapport à leur moyenne dans l'année, elles prennent ensemble de

grandes valeurs en même temps. À l'inverse, la consommation de glaces et l'énergie utilisée pour le chauffage sont des v.a. négativement corrélées.

Théorème 38.18

Soit X et Y deux v.a.r. définies sur Ω . Alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration.

□

Exemple 11. Soit $p \in]0, 1[$ et X une v.a. telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$. On pose $Y = 1 - X$. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exemple 12. Pour tout $\lambda \in E$ et toute v.a.r. Y , on a $\text{Cov}(\lambda, Y) = 0$.

2.4 Propriétés de la covariance

Théorème 38.19

Soit X, X', Y, Y' des v.a.r. définies sur Ω .

1. $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geq 0$
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
3. Cov est une forme bilinéaire sur l'ensemble des v.a.r. : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cov}(\alpha X + \beta X', Y) = \alpha \text{Cov}(X, Y) + \beta \text{Cov}(X', Y)$$

$$\text{Cov}(X, \alpha Y + \beta Y') = \alpha \text{Cov}(X, Y) + \beta \text{Cov}(X, Y')$$

Théorème 38.20 – “Identité remarquable”

Soit X et Y des v.a.r. définies sur Ω . Alors

Démonstration.

□

On peut généraliser la Propriété précédente à n variables :

Théorème 38.21

Pour toute famille (X_1, \dots, X_n) de v.a.r. définies sur Ω , on a

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Démonstration. L'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ se généralise à n réels a_1, \dots, a_n :

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

La preuve de la formule ci-dessus suit le même cheminement en partant de $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Cov}(X_1 + \dots + X_n, X_1 + \dots + X_n)$ puis en utilisant la bilinéarité. □

Exemple 13. Voir Exemple 14 plus loin.

2.5 Variables aléatoires décorréliées

Définition 38.22

Deux v.a.r. X et Y définies sur Ω sont dites décorréliées si $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Théorème 38.23

Si X et Y sont des v.a.r. indépendantes, alors elles sont décorréliées.

Démonstration. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

□



La réciproque du Théorème 38.23 est fausse.

Exemple 14. Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

Exemple 15. Soit X et Y deux v.a. telles que $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = \mathbb{1}_{\{X=0\}}$. Alors X et Y sont décorréliées, mais ne sont pas indépendantes.

3 Inégalités probabilistes

Théorème 38.24 – Inégalité de Markov

Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Alors

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Démonstration. Soit $a > 0$. On affirme que les v.a. $\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}$ et $\frac{X}{a}$ vérifient :

$$\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} \leq \frac{X}{a}$$

Pour le prouver, on raisonne par disjonction de cas :

- Si $\omega \in \Omega$ est tel que $X(\omega) < a$, alors cette inégalité devient $0 \leq \frac{X(\omega)}{a}$, qui est vraie car X est positive.
- Si $\omega \in \Omega$ est tel que $X(\omega) \geq a$, alors cette inégalité devient $1 \leq \frac{X(\omega)}{a}$, qui est vraie car $X(\omega) \geq a$.

Alors, en passant à l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right)$$

donc

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

□

Théorème 38.25 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

En passant au complémentaire, on a donc

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration. On pose la v.a. positive

$$Y := (X - \mathbb{E}(X))^2$$

ainsi que $a := \varepsilon^2 > 0$. On applique l'inégalité de Markov à Y en a : on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq a) &\leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a} \\ \iff \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2\right) &\leq \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{\varepsilon^2} \\ \iff \mathbb{P}\left(\sqrt{(X - \mathbb{E}(X))^2} \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \\ \iff \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

□

Remarque. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est une *inégalité de concentration* : elle fournit une majoration de la probabilité que X n'appartienne pas à l'intervalle $[\mathbb{E}(X) - \varepsilon, \mathbb{E}(X) + \varepsilon]$, autrement dit que X s'écarte de plus de ε de son espérance.

Exemple 16. Soit X_1, \dots, X_n des v.a.r. indépendantes de même loi : on suppose que leur espérance (commune) est $M \in \mathbb{R}$ et leur variance (commune) est $V \in \mathbb{R}$. On pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

ce qui correspond à la moyenne des valeurs prises par les X_k . Alors

$$\mathbb{E}(S_n) = \dots\dots\dots$$

$$\mathbb{V}(S_n) = \dots\dots\dots$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n donne :

Interprétation :

On dit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge "en probabilité" vers M (hors-programme).

Exemple 17. On lance n fois une pièce équilibrée. Donner une minoration de la probabilité d'obtenir entre 40% et 60% de faces.

Note : si par exemple $n = 100$, la réponse exacte est

$$\sum_{k=40}^{60} \binom{100}{k} 0.5^{100} \approx 0.965$$

tandis que la majoration que nous avons obtenue donne :

$$\mathbb{P}(0.4 \leq S_n \leq 0.6) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

4 Compléments : preuve du Lemme 38.5

On reproduit ici le Lemme 38.5 et on en donne une preuve.

Lemme 38.26

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une v.a. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Démonstration. On a

$$\Omega = X^{-1}(E) = X^{-1}\left(\bigcup_{x \in E} \{x\}\right) = \bigcup_{x \in E} X^{-1}(\{x\})$$

Par ailleurs, on sait que si I_1, I_2, \dots, I_n sont des ensembles disjoints, alors on a la formule

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n} a_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in I_k} a_i$$

Comme les ensembles $X^{-1}(\{x\})$ sont disjoints pour deux valeurs de x distinctes, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
 \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{x \in E} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in E} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} x \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in E} x \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
 &= \sum_{x \in E} x \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \{\omega\}\right) \quad \text{car ces singletons } \{\omega\} \text{ sont disjoints deux à deux} \\
 &= \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\})) \\
 &= \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) \\
 &= \mathbb{E}(X)
 \end{aligned}$$

□

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour calculer l'espérance d'une v.a. Y , on peut :

- Si la loi de Y est usuelle, utiliser une des formules du cours.
- Déterminer la loi de Y , puis utiliser la définition de l'espérance.
- Si Y est de la forme $f(X)$, déterminer la loi de X puis utiliser le théorème de transfert.

Méthode

Pour calculer la variance d'une v.a. X , on peut :

- Si la loi de X est usuelle, utiliser une des formules du cours.
- Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(X)$ pour en déduire la variance.
- Plus rarement, utiliser la définition de la variance comme espérance de $(X - \mathbb{E}(X))^2$.
- Si $X = X_1 + \dots + X_n$ avec X_1, \dots, X_n décorrélées, calculer et sommer $\mathbb{V}(X_1), \dots, \mathbb{V}(X_n)$.
- Si $X = X_1 + X_2$ avec X_1, X_2 non décorrélées, calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$ et en déduire la variance de X (cette méthode peut se généraliser à n variables mais c'est rare).